3 (50 点)

図のような荷電粒子の質量を測定する装置を考える。荷電粒子は正の電荷 q を持ち，線分 OC と直交するように速さ v_0 でスリット X に入射する(図の☆印)。灰色の領域には紙面垂直上向きに大きさ B の磁束密度をもつ一様磁界がかけられている。また領域 Y(白抜きの狭い領域)には，粒子が横切ると加速または減速されるような交流電圧 $V = V_0\cos(2\pi ft)$ がかけられている(f は交流周波数)。図に示すように，この装置の中で粒子は平面内を 2 周し，再び X 付近に戻ってくる。この間 Y を 2 回通過するが，1 回目と 2 回目の加速・減速(あるいは減速・加速)のつり合いをうまくとれば 2 周後にスリット X を再び通過させることができ，そこで粒子検出の信号が発生するようになっている。

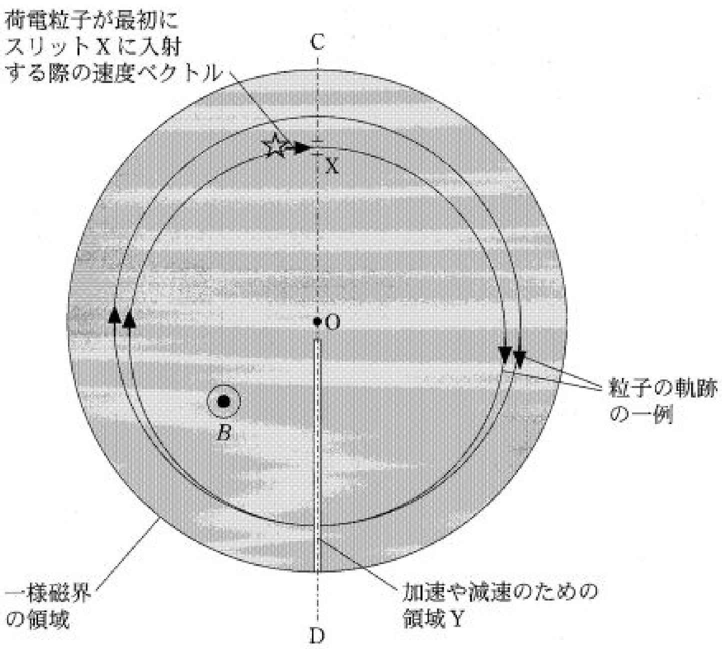
以下の設問では，粒子は，磁界の領域からはみ出ることなく真空中を運動し，障害物に衝突することはないものとする。また，スリット X の厚みは無視できるものとする。さらに，Y の電極間の幅は円運動の半径に比べて無視でき，粒子は，線分 OD を横切る際，瞬時に加速(または減速)されるものとする。

まず，設問〔A〕〔B〕においては X のスリットの幅 d の大きさを無視する。

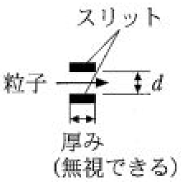
〔A〕 (a) スリット X を通過し最初に Y に入射するまでの粒子の回転半径 r_0 と角速度 ω_0 を，粒子の質量 m および q，B，v_0 の中から必要な記号を用いて表せ。

(b) 粒子が 1 回目に Y を通過したときに，電位差 V_1 で加速された。1 回目に Y を通過してから 2 回目に Y に入射するまでの粒子の回転半径 r_1 と角速度 ω_1 を，粒子の質量 m および V_1，q，B，v_0 の中から必要な記号を用いて表せ。

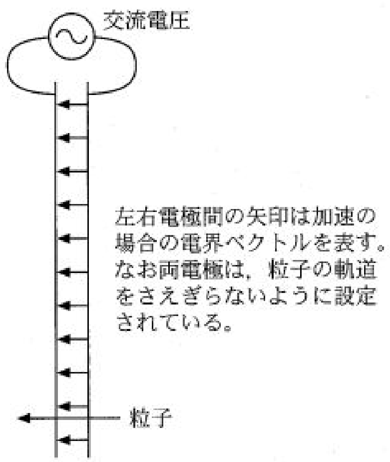
(c) 1 回目に Y を通過してから 2 回目に Y に入射するまでの時間 T を，粒子の質量 m および V_1，q，B，v_0 の中から必要な記号を用いて表せ。(以後 T を周回時間と呼ぶ。)



図



X の拡大図



Y の模式図

〔B〕 実際には，粒子は交流電圧の初期時刻 $t = 0$ とは関係なく不規則に次々と入射する。粒子が入射時刻によらず2周後にスリットXを必ず通過するように周波数 f の値を調整する。このような周波数はいくつも存在するが，これらを低い順に並べ f_0，f_1，…，f_n，…と表す(ただし n は整数)。

(d) 周回時間 T を，f_n および n を用いて表せ。

(e) 質量 m を，f_n，q，B，n を用いて表せ。

〔C〕 設問〔B〕の結果が示すように，粒子の質量 m や周回時間 T を求めるには，スリットXに2周後に戻ってくるような周波数 f_n を見つければよいことがわかる。実際にはスリットXには幅 d があり，スリット中心から外側または内側にそれぞれ $\frac{d}{2}$ の範囲で位置がずれたとしても粒子検出の信号が発生する。したがって，この方法で質量を測定する際には誤差が生じる。以下では，1個の粒子に着目し誤差の大きさを評価する。簡単のため，粒子は最初スリットXの中心に正確に入射したものとし，2周後にXを通過する際のスリット幅のみ誤差の原因になるものとして問いに答えよ。

(f) 周波数が f_n から少しずれていたために，2回目にYを通過する時刻における電圧が，加速・減速のつり合いがとれる電圧より ΔV だけずれた。このため粒子は，スリットXを，その中心より $\frac{d}{2}$ だけ外側にずれて通過した。d を $|\Delta V|$，q，B，v_0 の中から必要な記号を用いて表せ。ここで電圧のずれによるエネルギーの変化は粒子の運動エネルギーに比べて十分小さく，$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$ ($|x|$ が1に比べて十分小さいとき)としてよい。

(g) ずれた周波数に基づいて求めた周回時間と，真の周回時間 T との差を ΔT とする。そのとき，前問における $|\Delta V|$ は良い近似で $|\Delta V| = b|\Delta T|$ の関係式が成り立つものとする(ただし $b > 0$ とする)。スリットの幅に起因する質量の誤差の最大値 $|\Delta m|$ を q，B，v_0，b，d の中から必要な記号を用いて表せ。

〔A〕

(a)

$r_0 = \dfrac{mv_0}{qB}$， $\omega_0 = \dfrac{qB}{m}$

解説

荷電粒子はローレンツ力を向心力とする等速円運動をするから，

荷電粒子の円運動の中心方向の運動方程式は， $m\dfrac{{v_0}^2}{r_0} = qv_0B$ である。

よって， $r_0 = \dfrac{mv_0}{qB}$ ・・・(答)

また， $v_0 = r_0\omega_0$ より， $\omega_0 = \dfrac{v_0}{\dfrac{mv_0}{qB}} = \dfrac{qB}{m}$ ・・・(答)

(b)

$r_1 = \dfrac{m}{qB}\sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{2qV_1}{m}}$， $\omega_1 = \dfrac{qB}{m}$

解説

Y の模式図の左側電極に対する右側極板の電圧を V_1 とすると，

領域 Y に入射直後と領域 Y 通過後の力学的エネルギー保存則より，

$\dfrac{1}{2}m{v_0}^2 + qV_1 = \dfrac{1}{2}m{v_1}^2 \quad \therefore v_1 = \sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{2qV_1}{m}}$

以後は(1)と同様に処理することにより， $r_1 = \dfrac{m}{qB}\sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{2qV_1}{m}}$ ・・・(答)

また， q, B, m は変化していないから， $\omega_1 = \dfrac{qB}{m}$ ・・・(答)

(c)

$T = \dfrac{2\pi m}{qB}$

解説

長さ $2\pi r_1$ の円周を速さ v_1 で 1 周する時間が T だから， $T = \dfrac{2\pi r_1}{v_1}$ ・・・①

また， $r_1 = \dfrac{mv_1}{qB}$ より， $\dfrac{r_1}{v_1} = \dfrac{m}{qB}$ ・・・②

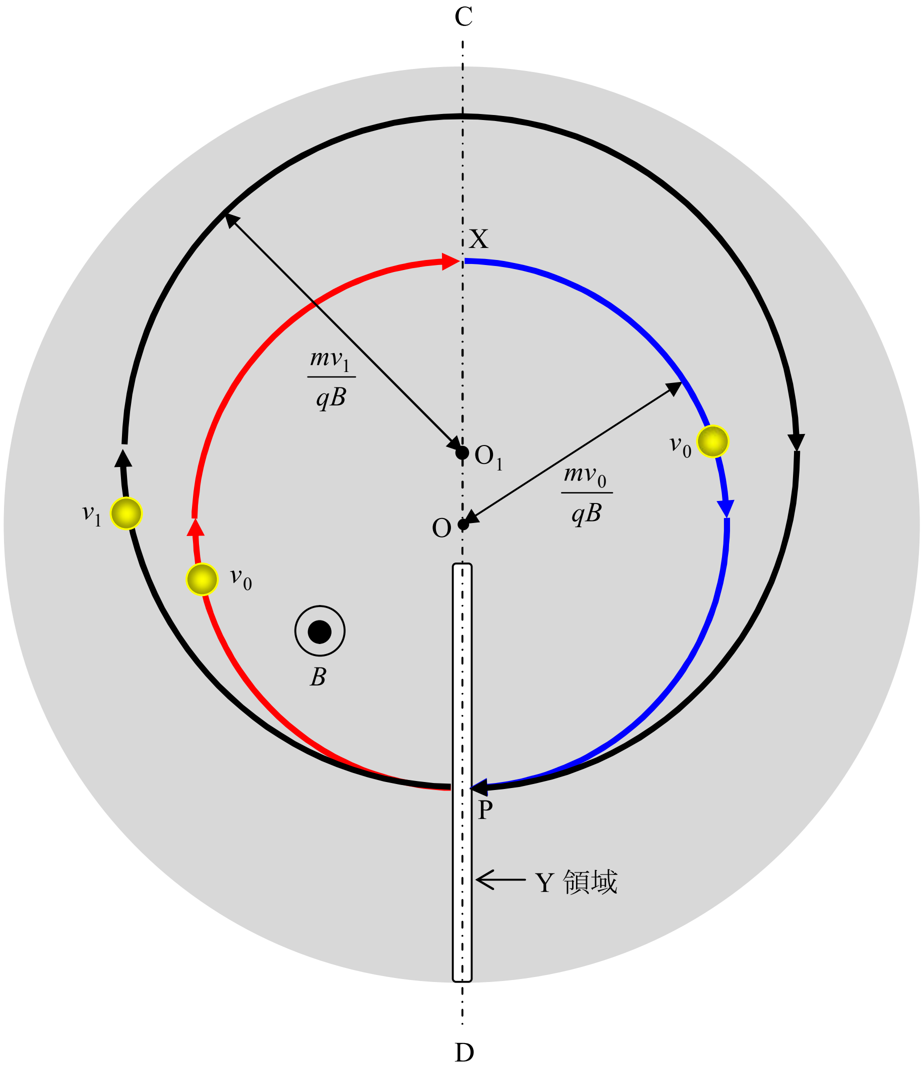
①，②より， $T = \dfrac{2\pi m}{qB}$ ・・・(答)

〔B〕

(d)

$$T=\frac{2n+1}{2f_n}$$

解説



粒子が 1 回目に Y 領域通過してから再び通過するまで

「OD を横切るとき瞬時に加速（または減速）されるものとする」より，

粒子の OD 上の通過点を P，通過後の粒子の速さを v_1 とすると，

通過後の粒子の円軌道半径が $\frac{mv_1}{qB}$ になるから，

通過後の粒子は，線分 PC 上の点 P より上方 $\frac{mv_1}{qB}$ の点 O_1 を中心に等速円運動をする。

したがって，その粒子が再び Y 領域を通過する点も P である。

粒子が再び Y 領域を通過後スリット X に入射するための条件

粒子が点 P を初めて通過するまでは,

粒子は線分 PC 上の点 P より上方 $\frac{mv_0}{qB}$ の点 O を中心に等速円運動をしていたから,

粒子が 2 回目に点 P を通過してからスリット X に入射するためには,

点 P 通過後の粒子の速さが再び v_0 になればよい。

交流電圧の条件

Y の模式図の左側電極の電位を基準（$0[\mathrm{V}]$）とする。

1 回目の点 P 通過前後の力学的エネルギー保存則

通過時刻を $t=t_1$ とすると $V_0\cos(2\pi f_n t_1)$

これと力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+qV_0\cos(2\pi f_n t_1)=\frac{1}{2}mv_1{}^2+0 \quad ・・・①$$

2 回目の点 P 通過前後の力学的エネルギー保存則

通過時刻を $t=t_2$ とすると $V_0\cos(2\pi f_n t_2)$

これと力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2+qV_0\cos(2\pi f_n t_2)=\frac{1}{2}mv_0{}^2+0 \quad ・・・②$$

①，②より， $V_0\cos(2\pi f_n t_2)=-V_0\cos(2\pi f_n t_1)$

$\therefore V_0\cos(2\pi f_n t_2)=V_0\cos\{2\pi f_n t_1+(2n+1)\pi\} \quad (n=0,1,2,\cdots)$

よって， $2\pi f_n t_2-2\pi f_n t_1=\{2\pi f_n t_1+(2n+1)\pi\}-2\pi f_n t_1=(2n+1)\pi \quad ・・・③$

また， $T=t_2-t_1$ より,

$2\pi f_n t_2-2\pi f_n t_1=2\pi f_n(t_2-t_1)=2\pi f_n T \quad ・・・④$

③，④より， $2\pi f_n T=(2n+1)\pi \quad \therefore T=\frac{2n+1}{2f_n} \quad ・・・(答)$

補足

要するに,

粒子の回転周期 T における交流電圧の位相差が $(2n+1)\pi$ であればよいから,

$$2\pi f_n T=(2n+1)\pi \quad \therefore T=\frac{2n+1}{2f_n}$$

(e)

$$m=\frac{(2n+1)qB}{4\pi f_n}$$

解説

$T=\frac{2\pi m}{qB}$， $T=\frac{2n+1}{2f_n}$ より， $\frac{2\pi m}{qB}=\frac{2n+1}{2f_n} \quad \therefore m=\frac{(2n+1)qB}{4\pi f_n} \quad ・・・(答)$

〔**C**〕

(f)

$$d=\frac{4|\Delta V|}{Bv_0}$$

解説

2 回目に領域 Y を通過後の軌道半径について

Y の模式図の左側電極に対する右側極板の電位を V_1 とすると，

領域 Y に入射直後と領域 Y 通過後の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+qV_1=\frac{1}{2}mv_1{}^2 \quad \therefore v_1=\sqrt{v_0{}^2+\frac{2qV_1}{m}} \quad ・・・⑤$$

2 回目に領域 Y を通過し，スリット X の中心に入射するためには，

右側極板の電位が $-V_1$ であればよい。

よって，その中心より $\frac{d}{2}$ だけ外側にずれて通過するとき，

その電位は $-V_1+|\Delta V|$ と表される。

そこで，通過後の粒子の速さを v_2 とすると，

領域 Y に入射直後と領域 Y 通過後の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2+q\left(-V_1+|\Delta V|\right)=\frac{1}{2}mv_2{}^2 \quad \therefore v_2=\sqrt{v_1{}^2+\frac{2q\left(-V_1+|\Delta V|\right)}{m}}$$

これと⑤より，

$$\begin{aligned} v_2&=\sqrt{v_1{}^2+\frac{2q\left(-V_1+|\Delta V|\right)}{m}} \\ &=\sqrt{\left(v_0{}^2+\frac{2qV_1}{m}\right)+\frac{2q\left(-V_1+|\Delta V|\right)}{m}} \\ &=\sqrt{v_0{}^2+\frac{2q|\Delta V|}{m}} \end{aligned}$$

よって，通過後の円軌道の半径を r_2 とすると，

$$\begin{aligned} r_2&=\frac{mv_2}{qB} \\ &=\frac{m}{qB}\sqrt{v_0{}^2+\frac{2q|\Delta V|}{m}} \\ &=\frac{mv_0}{qB}\sqrt{1+\frac{q|\Delta V|}{\frac{mv_0{}^2}{2}}} \end{aligned}$$

条件より，$\frac{mv_0{}^2}{2}>>q|\Delta V|$ だから，

$$r_2 = \frac{mv_0}{qB}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{q|\Delta V|}{\frac{mv_0{}^2}{2}}\right)$$

$$= \frac{mv_0}{qB} + \frac{|\Delta V|}{Bv_0}$$

$$= r_0 + \frac{|\Delta V|}{Bv_0} \quad \cdot\cdot\cdot ⑥$$

粒子の速さが $\boldsymbol{v_2}$ のときと $\boldsymbol{v_0}$ のときの軌道半径の差について

(d)の解説より，Y 領域通過点は同じだから，

粒子の速さが v_2 のときの軌道の直径が速さ v_0 のときのそれより $\frac{d}{2}$ 大きい。

よって，$r_2 = r_0 + \frac{d}{4}$ $\cdot\cdot\cdot$ ⑦

⑥，⑦より，$\frac{d}{4} = \frac{|\Delta V|}{Bv_0}$ $\quad \therefore d = \frac{4|\Delta V|}{Bv_0}$ $\cdot\cdot\cdot$ (答)

(g)

$$|\Delta m| = \frac{qB^2 v_0 d}{8\pi b}$$

解説

$|\Delta V| = b|\Delta T|$，$|\Delta T| = \frac{2\pi|\Delta m|}{qB}$，$\frac{d}{4} = \frac{|\Delta V|}{Bv_0}$ より $|\Delta V| = \frac{Bv_0 d}{4}$

よって，$\frac{Bv_0 d}{4} = \frac{2\pi b}{qB}|\Delta m|$ $\quad \therefore |\Delta m| = \frac{qB^2 v_0 d}{8\pi b}$ $\cdot\cdot\cdot$ (答)